1.3 Einführung und Zahlensysteme/Rechnen mit Dualzahlen

1.3.1 Wie rechnet man im Dualsystem?

Im Computer werden Zahlen nicht nur gespeichert, man will mit ihnen auch zählen und rechnet. Daher ist nun die Frage: Wie rechnet man eigentlich im Dualsystem bzw. wie rechnet ein Computer?

1.3.2 Zählen im Dualsystem

Im Dezimalsystem ist einfach: Man sieht sich die letzte Ziffer an und ersetzt sie durch die nächste Ziffer aus der Menge der Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Handelt es sich um die Ziffer 9, ersetzt man sie durch die Ziffer 0 und wendet dasselbe Verfahren auf die Ziffer an, die eine Stelle weiter links steht und so weiter. Das nennt man dann Übertrag.

Genauso ist es im Dualsystem, nur unschlagbar einfacher: 0 wird zu 1, und bei 1 gibt es einen Übertrag zur nächsthöheren Stelle.

Bei einem Computer ist – ähnlich wie bei einem mechanischen Zählwerk – die Stellenzahl begrenzt. Nach der höchsten darstellbaren Zahl springt das Ergebnis wieder auf 0.

1.3.3 Addition einstelliger Zahlen

Aus der Grundschule weiß man vielleicht noch, dass man kleine Zahlen (z. B. 4 und 3) auf zwei Arten addieren konnte:

- Man konnte die Finger benutzen: Zuerst 4 Finger zeigen, dann 3 Finger hinzuzählen, zum Schluss 7 Finger ablesen. Dieses Verfahren heißt Zählverfahren.
- Später wusste man das Ergebnis auswendig. In der Computertechnik spricht man von einer *Lookup Table.*

In der Frühzeit der Computertechnik war auch das Zählverfahren in Gebrauch. Schon vor langer Zeit hat sich die *Lookup Table* durchgesetzt. Das hat mit dem verwendeten Zahlensystem zu tun. Tabelle 1 zeigt eine Lookup-Table für das Dezimalsystem. Sie enthält 100 Einträge. In der Tabelle

	0	1	2	...	9
0	0+0=00	0+1=01	0+2=02	...	0+9=09
1	1+0=00	1+1=02	1+2=03	...	1+9=10
...	...	...	...	...	...
9	9+0=09	9+1=10	9+2=11	...	9+9=18

Tabelle 1: Lookup-Table für das Dezimalsystem

2 sieht man eine Lookup-Table für das Dualsystem. Sie enthält dagegen nur vier Einträge. Ordnet

	0	1
0	0+0=00	0+1=01
1	1+0=01	1+1=10

Tabelle 2: Lookup-Table für das Dualsystem

man die Tabelle anders an (nämlich zeilenweise), dann merkt man, dass in der letzten Spalte eine EXOR-Verknüpfung vorliegt und in der vorletzten Spalte eine UND-Verknüpfung (Tabelle 3). Beide zusammen bilden den so genannten *Halbaddierer*.

A	B	A+B	
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabelle 3: Lookup-Table für das Dualsystem in der Anordnung einer Wahrheitstabelle

1.3.4 Addition mehrstelliger Zahlen

Bei mehrstelligen Zahlen kann man in einem Stellenwertsystem so addieren, dass man jede Stelle für sich addiert. Hier sind vier Beispiele.

```
 037   037   193   999
+042  +044  +498  +003
        1    11   111
----  ----  ----  ----
 079   081   691  U002
```

Im linken Beispiel sieht man, wie schön das funktioniert. Im zweiten Beispiel taucht bereits ein Übertrag auf, er wird bei der folgenden Stelle hinzuaddiert. Im dritten Beispiel sorgt ein Übertrag dafür, dass die obige Lookup-Table nicht mehr ausreicht: Für $9 + 9 + 1 = 19$ ist dort kein Platz[1]. Und im rechten Beispiel sieht man einen Überlauf. Das dreistellige Addierwerk kann das Ergebnis 1002 nicht mehr fassen.

Genauso funktioniert es auch im Dualsystem:

```
 0100   0011   0011   1111
+1010  +1010  +0011  +0010
          1      11   111
-----  -----  -----  -----
 1110   1101   0110  U0001
```

Zuerst wieder ein Beispiel ohne Übertrag, dann ein Beispiel mit Übertrag. Das dritte Beispiel hat als Ergebnis $1 + 1 + 1 = 11_{(2)}$, das letzte Beispiel zeigt wieder einen Überlauf des (hier nur vierstelligen) Addierwerks. Als Ergebnis erhält man 1 statt $10001_{(2)}$.

[1] Man muss die Lookup-Table verdoppeln: Einmal mit und einmal ohne Übertrag