1.1 Einführung und Zahlensysteme/Einführung

1.1.1 Wie man die Physik überlistet

In einem Talsperrengebiet in der Schweiz mussten in regelmäßiger Folge Wasserstandsdaten ins Tal geliefert werden. Diese Wasserstandsdaten sollten automatisiert geliefert werden.

Analoge Signalübertragung Die damals herkömmliche Methode zeigt Abbildung 1. Ein Schwim-

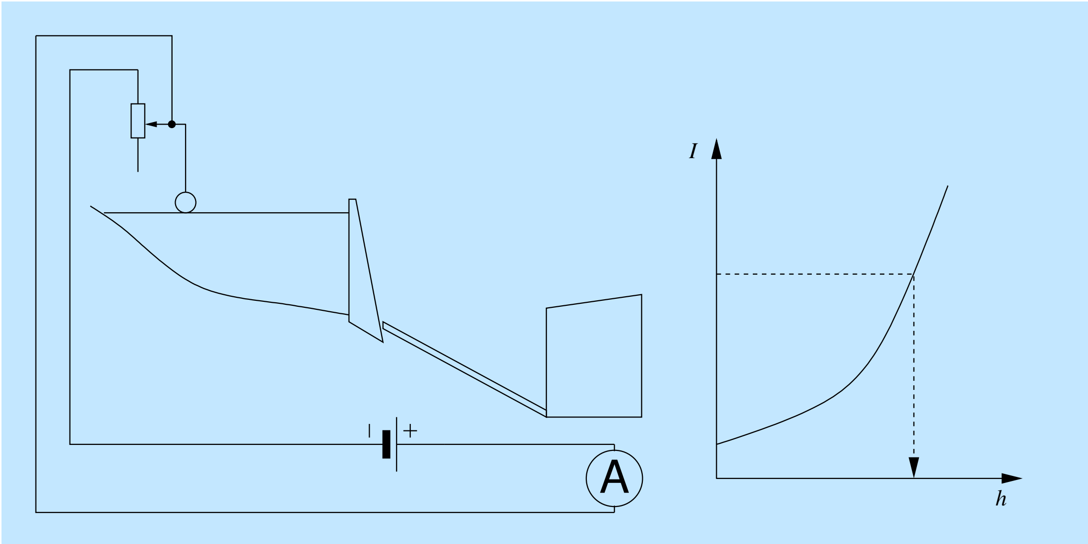


Abbildung 1: Analoge Signalübertragung

mer betätigt einen einstellbaren Widerstand. Damit ist jeder Stromstärke der entsprechende Wasserstand zuzuordnen. Stromstärke und Wasserstand sind zueinander analog. Man spricht daher von einem *analogen Signal*. Probleme können entstehen durch Spannungsdrift, Störspannungen und Verschmutzung.

Binäre Signalübertragung Eine andere übliche Methode vermied diese Nachteile, sie ist in Abbildung 2 gezeigt. Hier braucht die Leitung nur noch auszusagen: Wasserstand (zu) hoch oder

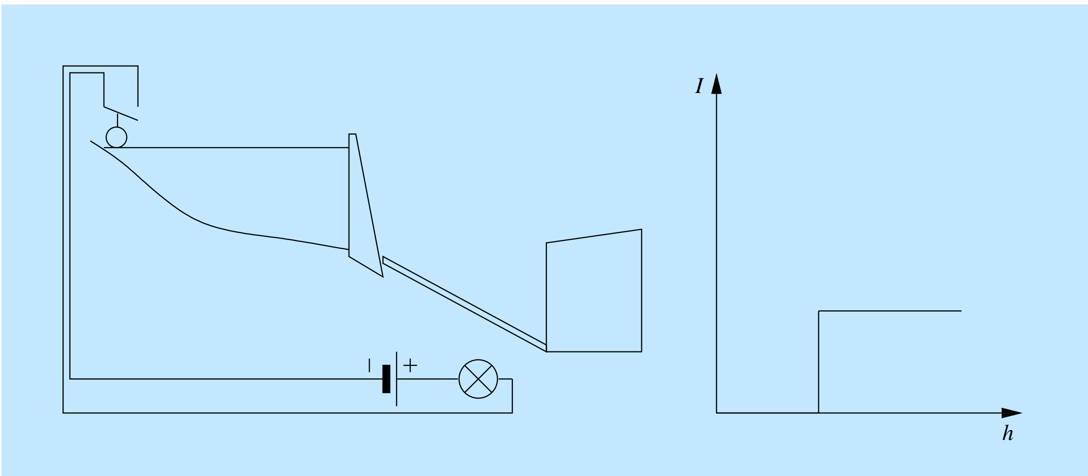
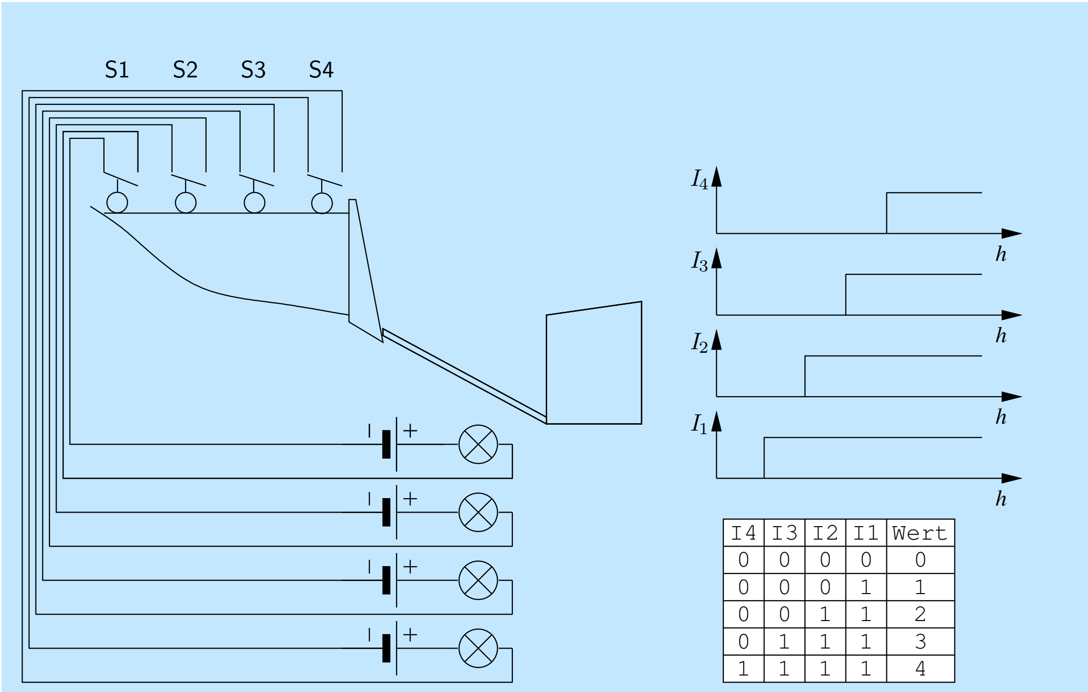


Abbildung 2: Binäre Signalübertragung

Wasserstand (zu) niedrig. $I = 0\,\mathrm{A}$ entspricht niedrig, $I = U_0/R_L$ entspricht hoch. Es gibt genau einen Umschaltpunkt. Der Vorteil dabei ist eine deutliche Vereinfachung — es sind nicht mehr genaue Strom- und Spannungsstabilisierungen nötig, sondern nur noch Schalter und ggf. Glühlampen als Anzeige. Der Nachteil liegt darin, dass nur noch zwei Zustände (0/L, 0/1 oder L/H genannt) unterschieden werden können, also eine systembedingte Unklarheit. Man spricht von einem *binären Signal*.

Digitale Signalübertragung Um diese Methode zu verbessern, hat man dieses Prinzip einfach vervielfacht. Man sieht das Ergebnis in Abbildung 3. Wieder brauchte jede Leitung nur die



I4	I3	I2	I1	Wert
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	1	2
0	1	1	1	3
1	1	1	1	4

Abbildung 3: Digitale Signalübertragung

Information “ja” oder “nein” zu liefern. Aus der Summe der einzelnen “j” und “n” konnte man eine genauere Information ermitteln. Damit kann man zwischen mehreren (mehr als zwei) verschiedenen Zuständen unterscheiden. Hier spricht man von einem *digitalen Signal*. Die Digitaltechnik war damit (wieder einmal) entstanden. Man sieht den Nachteil digitaler Signalübertragung, nämlich den großen Aufwand. Digitale Signale kann man auch nicht mehr gut mit Koordinatensystemen beschreiben, sondern eher durch Tabellen (wie in Abbildung 3).

1.1.2 Multiplex-Verfahren

Wie kann man den Aufwand bei digitaler Darstellung verringern? Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Benutzung einer besseren Zuordnung Wasserstand – Bitmuster (Codierung), s.u.
- Gemeinsame Rückleitung (Erde)
- Mehrere Adern in einem Kabel (Raummultiplex)
- Periodische Umschaltungen (Zeitmultiplex, TDMA)
- Arbeiten mit verschiedenen Frequenzen (Frequenz- und Wellenlängenmultiplex, FDMA)
- Codemultiplex (CDMA)

1.1.3 Codierung

Die in der Abbildung 3 dargestellte Zuordnung zwischen Zustandskombinationen und Wasserstand, also zwischen der künstlichen (technischen) Darstellung und realer Bedeutung, nennt man Codierung. Hier wurde der so genannte Zählcode benutzt, d.h. die Anzahl der Einsen in der Tabelle ergibt die Nummer des Bedeutung (0111=drei Einsen ergibt Zustand drei, 1111=vier Einsen Zustand vier usw.). Damit bleiben eine ganze Reihe von Kombinationen (z.B. 0101) unbenutzt; von 16 möglichen Kombinationen (so genannten *Bitmustern*) werden nur fünf verwendet.

Deshalb wird oft ein anderer Code verwendet, der so genannte *natürliche Binärcode*, der in Tabelle 1 gezeigt wird. Wenn man die Tabelle untersucht, fallen (mindestens) zwei Dinge auf:

I4	I3	I2	I1	Wert
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7

I4	I3	I2	I1	Wert
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

Tabelle 1: Natürlicher Binärcode

a) Bei I_1 findet ein Wechsel 0-1 nach jeder Zeile statt, bei I_2 findet ein Wechsel 0-1 nach jeder zweiten Zeile statt, bei I_3 findet ein Wechsel 0-1 nach jeder vierten Zeile statt usw.

b) Wenn man den Spalten I_4, I_3, I_2 und I_1 die Stellenwerte 8, 4, 2 und 1 zuteilt, kann man damit den Wert (bzw. die Nummer) einer Zeile ausrechnen.

Der Code heißt natürlicher Binärcode, weil er dem Dualzahlensystem ähnelt; dieses wiederum ist eng verwandt mit dem im täglichen Leben verwendeten Dezimalzahlensystem.

1.1.4 Zahlensysteme

Ein Code dient zur Übersetzung *endlich* vieler Zustandsmuster in Werte; damit ist er in einer Tabelle (mit *endlich* vielen Zeilen) darstellbar.

Zahlensysteme dagegen dienen zur Darstellung *unendlich* vieler möglicher Werte. Bei ihnen gibt es deshalb keine Tabelle (die müsste ja unendlich viele Zeilen haben), sondern eine Formel bzw. Gesetzmäßigkeit zur Berechnung des Wertes.

Computer benutzen zum Rechnen meistens das Dualzahlensystem (Zweiersystem), während im täglichen Gebrauch das Dezimalzahlensystem (Zehnersystem) üblich ist. Beide Systeme sind sehr eng miteinander verwandt, und beide nutzen die möglichen Ziffernkombinationen optimal aus. Es sind *Stellenwertsysteme*, d.h. die Bedeutung einer Ziffer hängt von ihrer Position (=Stelle) in der Zahl ab. Beispiel: $123 \neq 321$.

1.1.4.1 Für Menschen: das Dezimalsystem Seit dem 16. Jahrhundert hat sich in Europa das Dezimalsystem durchgesetzt. Darin gibt es 10 verschiedene Ziffern, und zwar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Eine Zahl setzt sich aus einer oder mehreren beliebigen Ziffern zusammen. Der Wert einer Zahl berechnet sich beispielsweise so:
$836 = 8$ Hunderter $+ 3$ Zehner $+ 6$ Einer
Die hinterste Stelle hat also die Wertigkeit (=den *Stellenwert*) 1, die Stelle davor den Stellenwert 10, die Stelle davor 100 (siehe Tabelle 2). Jede Stelle ist also zehnmal so viel wert wie die Stelle dahinter. Die Zahl 10 nennt man daher die *Basis* des Dezimalsystems. Um an den Wert der Zahl

Stellenwert →	100	10	1
Ziffer →	8	3	6

Tabelle 2: Stellenwerttafel der Basis 10

zu kommen, multipliziert man für jede Stelle den Stellenwert (oben) mit dem Wert der Ziffer an dieser Stelle (unten) und rechnet alles zusammen:

$$836 = 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1$$

$$836 = 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

Will man ausdrücklich sagen, dass eine Ziffernkombination (z.B. 4711) eine Dezimalzahl ist, schreibt man $4711_{(10)}$.

1.1.4.2 Für Maschinen: das Dualsystem In den meisten Computern und in einem Großteil der Software wird ein anderes Zahlensystem verwendet, das Dualzahlensystem. Hier gibt es nur zwei verschiedene Ziffern, nämlich 0 und 1. Eine Zahl wie 816 gibt es daher im Dualsystem nicht, denn 8 und 6 sind keine erlaubten Ziffern. Aber eine Zahl 1101 gibt es auch im Dualsystem. Sie hat nur einen anderen Wert als die 1101 im Dezimalsystem. Im Dualsystem sind nämlich die Stellenwerte anders. Die hinterste Stelle (ganz rechts) hat wieder die Wertigkeit (den *Stellenwert*)

Stellenwert →	8	4	2	1
Ziffer →	1	1	0	1

Tabelle 3: Stellenwerttafel der Basis 2

1, die Stelle davor den Stellenwert 2, die Stelle davor 4 usw. (siehe Tabelle 3). Jede Stelle ist also doppelt so viel Wert die Stelle dahinter. Die Zahl 2 ist deshalb die Basis des Dualsystems.

Der Wert der Zahl 1101 im Dualsystem berechnet sich so:
1101 = 1 Achter + 1 Vierer + 0 Zweier + 1 Einer.

$$1101 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

$$1101 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Wieder wird für jede Stelle der Wert der Stelle (oben) mit dem Wert der Ziffer (unten) multipliziert und alles aufaddiert.

Will man ausdrücklich sagen, dass eine Ziffernkombination (z.B. 1011) eine Dualzahl ist, schreibt man $1011_{(2)}$.

1.1.5 Umwandlung einer Zahl vom Dualsystem in das Dezimalsystem

Die Umwandlung beginnt mit einer Zerlegung (s.o.), also:

$$1101_{(2)} = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

Mit dem Ausrechnen dieser Zerlegung ist man bereits fertig:

$$1101_{(2)} = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

Auch größere Zahlen kann so umwandeln, etwa $1101010101010_{(2)}$. Am einfachsten geht das wieder mit der Stellenwerttafel:

Stellenwert →	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
Ziffer →	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

$$1 \cdot 4096 + 1 \cdot 2048 + 0 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6826$$

Für die Umwandlung langer Zahlen von Hand nach dieser Methode braucht man daher die Reihe der Zweierpotenzen, also 1,2,4,8,16,32,64,128,256,. . . .

Die folgende Methode kommt dagegen ohne die Zweierpotenzen aus: Man fängt links mit dem Wert 0 an, addiert die Ziffer hinzu; solange rechts eine weitere Ziffer folgt, multipliziert man das Ergebnis mit zwei und addiert wieder die Ziffer. Hier wieder ein Beispiel:

1	1	0	1	Ergebnis
				Start $= 0$
1				$0 + 1 = 1$
	2			$1 \cdot 2 = 2$
	3			$2 + 1 = 3$
		6		$3 \cdot 2 = 6$
		6		$6 + 0 = 6$
			12	$6 \cdot 2 = 12$
			13	$12 + 1 = 13$

1.1.6 Umwandlung einer Zahl vom Dezimalsystem in das Dualsystem

Wenn man eine Dezimalzahl in das Dualsystem umwandeln möchte, kann man selbstverständlich auch dafür die Stellenwerttafel nehmen. Es gibt aber ein einfacheres Verfahren. Es funktioniert so:

Man dividiert die Dezimalzahl fortlaufend durch zwei, wobei man den Rest bei der folgenden Division einfach weglässt. Stattdessen wird er hinter das Ergebnis geschrieben. Ist das Ergebnis null, ist die Umwandlung beendet. Das Ergebnis besteht aus der Rest-Spalte (fett gedruckt), allerdings **von unten nach oben gelesen**:

$$\begin{aligned}
44 : 2 &= 22 \text{ Rest } \mathbf{0}\\
22 : 2 &= 11 \text{ Rest } \mathbf{0}\\
11 : 2 &= 5 \text{ Rest } \mathbf{1}\\
5 : 2 &= 2 \text{ Rest } \mathbf{1}\\
2 : 2 &= 1 \text{ Rest } \mathbf{0}\\
1 : 2 &= 0 \text{ Rest } \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Von unten nach oben gelesen erhält man so das Ergebnis $44_{(10)} = 101100_{(2)}$.